PROJET 1

IMPORTANT : Chacune des questions de ce sujet doit être traitée à l'aide de maple.

1 Système différentiel linéaire à coefficients constants et exponentielle de matrice

On définit l'exponentielle d'une matrice carrée A d'ordre n par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ avec } A^0 = I_n.$$

Si A est diagonalisable et admet les valeurs propres $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, on a l'égalité $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice carrée d'ordre n constituée des vecteurs propres de A et

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi $A^k = PD^kP^{-1}$ et $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ avec

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Soient les matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $At = \begin{pmatrix} t & -2t \\ -t & t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Question 1: Calculer la matrice D associée à A (on expliquera pourquoi ce calcul est possible).

Question 2: Calculer les matrice $\exp(D)$ et $\exp(A)$ en utilisant les définitions données précédemment.

Considérons le système d'équations différentielles défini par

$$Y'(t) = AY(t)$$

où $Y(t) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur des solutions et A est la matrice carrée d'ordre 2 définie précédemment. Si on impose une condition initiale $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^2$, on peut montrer que

$$Y(t) = \exp(At)Y_0.$$

Question 3: Utiliser les résultats précédents pour résoudre le système.

Question 4: Comparer cette solution avec celle d'une résolution classique vue en TP.

2 Somme multi-indicée

L'objectif de cet exercice est le calcul de la somme

$$s(p,n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Question 5: Écrire une procédure *invprod* qui reçoit en paramètre une liste d'entiers l et renvoie l'inverse du produit des éléments de l.
Exemple : *invprod*([3, 2, 1, 5])=1/30.

Question 6: Écrire une procédure *sigma* qui reçoit en paramètre une liste de listes d'entiers ll et renvoie la somme des nombres *invprod*(l) pour $l \in ll$.
Exemple : *sigma*([[3, 2,1,5], [2, 5, 4], [10], [2, 6, 1]])=1/30 + 1/40 + 1/10 +1/12 = 29/120.

Question 7: Écrire une procédure *ajouter* qui reçoit en paramètre une liste de listes d'entiers ll et un élément x et renvoie la liste de listes où x a été ajouté en tête de chacune des listes de ll.
Exemple : *ajouter*([[3, 2, 1, 5], [2, 5, 4], [10], [2, 6, 1]],4)=([[4, 3, 2, 1, 5], [4, 2, 5, 4], [4,10], [4, 2, 6, 1]]).

Question 8: On appelle sous-liste d'une liste $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ une liste $[a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}]$ telle que $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$. Par exemple, [], [4, 2] et [3, 4, 1] sont des sous-listes de [1, 3, 5, 4, 2, 6, 1] mais [6, 4] n'en est pas une.
Ecrire une procédure récursive *generer* pour engendrer la liste de toutes les sous-listes de longueur p donnée d'une liste l.
Exemple :*generer*(3, [3, 2, 1, 5])=[[2, 1, 5], [3, 1, 5], [3, 2, 5], [3, 2, 1]].

Question 9: Utiliser la question précédente pour écrire une procédure *suite* qui reçoit les paramètres p et n et qui renvoie la listes des suites strictement croissantes de longueurs p d'entiers de l'intervalle [1, n].
Exemple : *suite*(3,4)=[[2, 3, 4], [1, 3, 4] [1, 2, 4] [1, 2, 3]].

Question 10: En déduire le programme de la fonction $(p, n) \rightarrow s(p, n)$.

3 Quelques questions...

Le but de cet exercice est d'utiliser les fonctionnalités de Maple pour répondre à différentes questions de mathématiques générale indépendantes les unes des autres.
Question 11: On rappelle que la sphère unité de $\mathbb{R}^2$ associée à une norme $\|.\|$ est définie par

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)\| = 1\}.$$

Représenter sur un même graphique les sphères S_1, S_2 et S_∞ associées respectivement aux normes

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|, \|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2}, \|(x,y)\|_\infty = \max(|x|,|y|).$$

Question 12: Proposer une méthode pour calculer le rayon de convergence et la somme, quand celle-ci est définie, de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$.

Question 13: Etudier sur l'intervalle $[0,1]$ les convergences simples et uniformes de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{x}{1+nx})_{n\in\mathbb{N}}$. Proposer une technique graphique pour vérifier les résultats obtenus.

Question 14: Ecrire le polynôme $P(x) = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 25x^2 + 24x - 10$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

Question 15: Vérifier que la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\to \int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

est linéaire.

Question 16: Vérifier le théorème de Cayley-Hamilton pour les matrices carrées d'ordre 3.

Question 17: Soit

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} cosh(t) & -sinh(t) \\ -sinh(t) & cosh(t) \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vérifier que $(\mathcal{L}, *)$ est un groupe (* désigne la multiplication matricielle).